Čestmír LOSERT, prom.mat.
Vědeckovýzkumný uhelný ústav, Ostrava - Radvanice

ALGORITMUS PRO KONSTRUKCI KOSTRY A SYSTÉMU NEZÁVISLÝCH KRUŽNIC V GRAFU ALGEBRAICKOU METODOU

1. Definice grafu a některá tvrzení z teorie grafů

1.1 Úvod

Některé problémy, při jejichž formulaci a řešení je použito teorie grafů, velmi úzce souvisejí s pojmem kružnice v grafu. Při tom může vzniknout potřeba konstrukce takového systému kružnic, který v jistém smyslu reprezentuje systém všech kružnic v grafu. Takový systém budeme pro jednoduchost nazývat systémem nezávislých kružnic, přesnou definici tohoto pojmu uvedeme v odstavci 2.3.2.

Tento příspěvek se zabývá konstrukcí systému nezávislých kružnic v souvislých grafech. Algoritmus pro konstrukci takového systému je založen na vlastnostech matic popisujících strukturu grafu a strukturu kružnic v grafu. Jeho aplikace je výhodná zejména s použitím počítačů, příslušný program je velmi jednoduchý, zvláště použije-li se některého vyššího programovacího jazyka.

1.2 Definice grafu

1.2.1 Grafem G nazveme systém dvou množin U, H a zobrazení ω, píšeme

$$G = (U, H, \omega),$$

s následujícími vlastnostmi:

1) U, H jsou neprázdné konečné množiny,
2) ω je zobrazení kartézského součinu $\{-1,1\} \times H$ na množinu U takové, že

$$h \in H \Rightarrow \omega(-1,h) \neq \omega(1,h),$$

($\{-1,1\}$ značí dvouprvkovou množinu s prvky $-1,1$).

Prvky množiny U nazveme uzly grafu, prvky množiny H nazveme hrany grafu. Uzel $\omega(-1,h)$ nazveme počátečním a uzel $\omega(1,h)$ koncovým uzlem hrany h.

Grafy podle výše uvedené definice se někdy nazývají obšírněji orientovanými multigrafy. Podle naší definice se však nepřipouští prázdný graf, izolované uzly a t. zv. smyčky, což jsou hrany, jejichž koncový uzel je totožný s počátečním uzlem.

1.2.2 Nechť je dán graf

$$G = (U, H, \omega) \qquad (1)$$

a nechť je $\emptyset \neq H_0 \subset H$.

Položme

$$U_0 = \bigcup_{h \in H_0} \{\omega(-1,h), \omega(1,h)\},$$

$$\omega_0(\varepsilon,h) = \omega(\varepsilon,h) \quad pro \quad \varepsilon = \pm 1,\ h \in H_0$$

Potom graf

$$(U_0, H_0, \omega_0)$$

označíme stručně $G^*(H_0)$ a nazveme podgrafem grafu (1) vytvořeným podmnožinou jeho hran H_0.

1.2.3 Jelikož povaha prvků množin U, H je pro naše účely zcela nepodstatná, budeme v dalším předpokládat, že uzly i hrany grafu byly očíslovány přirozenými čísly, t.j. budeme pro graf s k uzly a m hranami jednoduše předpokládat, že

$$\left.\begin{array}{l} U = \{1,2,\ldots,k\}\ , \\ H = \{1,2,\ldots,m\}\ . \end{array}\right\} \quad (2)$$

1.2.4 Pro graf s k uzly a m hranami definujeme jeho incidenční matici Q takto (stále za předpokladu (2)):

$$Q = (q_{ji}) \quad ; \; j = 1,2,\ldots,k\,; \; i = 1,2,\ldots,m\,;$$

$$\left. q_{ji} = \begin{cases} \varepsilon, & \text{je-li } \omega(\varepsilon,i) = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \right\} \quad (3)$$

Incidenční matice libovolného grafu má v každém sloupci právě dva nenulové prvky, a to +1 a −1. Naopak každou takovou matici lze považovat za incidenční matici jistého grafu, takže strukturu grafu plně určuje jak zobrazení ω, tak i incidenční matice Q.

1.3 Řetězy, kružnice, souvislost

1.3.1 Stále předpokládáme, že platí (2). Posloupnost navzájem různých hran

$$i_1, i_2, \ldots, i_p \qquad (4)$$

daného grafu G nazveme řetězem délky p, jestliže existují čísla

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \qquad (5)$$

taková, že

$$|\varepsilon_a| = 1 \quad , \; a = 1,2,\ldots,p,$$

$$\omega(\varepsilon_a, i_a) = \omega(-\varepsilon_{a+1}, i_{a+1}) \text{ pro } a = 1,2,\ldots,p-1.$$

Položme

$$\left.\begin{array}{l} j_0 = \omega(-\varepsilon_1, i_1) \\ j_a = \omega(\varepsilon_a, i_a) \quad \text{pro } a = 1,2,\ldots,p \end{array}\right\} (6)$$

Říkáme pak, že řetěz (4) spojuje uzly j_0 a j_p. Čísla (5) nazveme směry hran v řetězu (4).

__1.3.2__ Řetěz (4) nazveme __otevřeným__, resp. __uzavřeným__, jestliže při označení (6) platí

$$j_0 \neq j_p \text{ , resp. } j_0 = j_p .$$

Řetěz (4) nazveme __jednoduchým__, jestliže uzly

$$j_0, j_1, \dots, j_p$$

(označení podle (6)) jsou navzájem různé s výjimkou vztahu $j_0 = j_p$ u uzavřených řetězů.

Podgraf daného grafu určený jednoduchým uzavřeným řetězem (ve smyslu 1.2.2) nazveme __kružnicí.__

Není-li obav z nedorozumění, nazýváme i v obecném případě řetězem nejen posloupnost (4), ale i podgraf vytvořený touto posloupností hran.

__1.3.3__ Graf nazveme __souvislým__, jestliže ke každým jeho dvěma uzlům existuje řetěz, který je spojuje.

Souvislý graf, který neobsahuje kružnice, nazveme __stromem__.

V dalším uvedeme několik tvrzení o vlastnostech souvislých grafů a o vztahu mezi incidenční maticí a kružnicemi. Důkazy těchto tvrzení pro nedostatek místa neuvádíme, lze je najít v příslušné literatuře.

__1.3.4__ Pro souvislý graf s n uzly má incidenční matice Q definovaná pomocí vztahu (3) hodnost $n-1$. Přesněji: řádky matice Q jsou lineárně závislé (jejich součet je roven 0), po vypuštění libovolného řádku jsou zbývající řádky (v počtu $n-1$) lineárně nezávislé.

__1.3.5__ Nechť $Q=(q_{ji})$ je incidenční matice libovolného grafu. Nechť q_{*i} značí i-tý sloupec matice (q_{ji}). Potom platí:

1) Je-li posloupnost hran

$$i_1, i_2, \dots, i_p$$

se směry

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$$

uzavřeným řetězem, platí

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \varepsilon_\alpha q_{\sigma i_\alpha} = 0 .$$

2) Podgraf

$$G^*(i_1, i_2, \dots, i_p)$$

určený hranami $i_1, i_2, \dots, i_p$ daného grafu G obsahuje kružnici právě tehdy, když odpovídající sloupce

$$q_{\sigma i_1}, q_{\sigma i_2}, \dots, q_{\sigma i_p}$$

jsou lineárně závislé.

2. Kostra grafu a systémy nezávislých kružnic

2.1 Kostra grafu

2.1.1 Podgraf daného grafu, který

1) neobsahuje kružnice,
2) nelze rozšířit další hranou původního grafu tak, aby zůstala zachována vlastnost 1,

nazýváme kostrou daného grafu.

2.1.2 Opět bez důkazu uvedeme toto důležité tvrzení:

Nechť je dán souvislý graf s n uzly. Potom libovolný podgraf je jeho kostrou právě tehdy, když

1) je vytvořen $n-1$ hranami

a současně 2) neobsahuje kružnice.

2.2 Matice uzavřených řetězů

2.2.1 Utvořme v daném grafu G s m hranami všechny uzavřené řetězy, nechť jejich počet je s. Definujme nyní matici

$$A=(a_{ri}) \quad \text{pro} \quad r=1,2,\dots,s\,;\; i=1,2,\dots,m$$

takto:

Je-li r-tý ($r=1,2,\dots,s$) uzavřený řetěz dán hranami

$$i_1, i_2, \dots, i_p \tag{7}$$

se směry

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p,$$

položíme

$$a_{ri} = \begin{cases} \varepsilon_\alpha\,, & \text{existuje-li v (7) hrana } i_\alpha \text{ tak, že } i_\alpha = i\,, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$(i=1,2,\dots,m)$.

2.2.2 Z 1.3.5 plyne okamžitě toto tvrzení:

Je-li $Q=(q_{ji})$ incidenční matice a je-li $A=(a_{ri})$ matice definovaná v 2.2.1, platí

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ri}\, q_{ji} = 0\,, \quad r=1,2,\dots,s\,,\; j=1,2,\dots,k\,. \tag{8}$$

2.2.3 Opět bez důkazu uvedeme toto tvrzení:

Pro souvislý graf s k uzly a m hranami má matice A definovaná v 2.2.1 hodnost

$$m-n-k+1\,.$$

Navíc platí: Předpokládáme-li, že očíslování hran je provedeno tak, že hrany

$$1,2,\dots,k-1$$

tvoří kostru grafu, existuje v matici A m řádků (pro určitost lze předpokládat, že je to právě prvních m řádků) ve tvaru

$$\left.\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,k-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}\right\} \tag{9}$$

2.3 Systémy nezávislých kružnic

2.3.1 Nechť je dán souvislý graf s m hranami a k uzly, položme $n = m-k+1$, buď s počet všech uzavřených řetězů v daném grafu, nechť matice (q_{pi}), (a_{ri}) mají význam z 1.2.4, 2.2.1. Nechť jsou dále $f_1, \dots, f_m$ dané funkce jedné proměnné.

Uvažujme soustavu rovnic

$$\sum_{i=1}^{m} q_{pi} x_i = 0 \quad , p = 1,2,\dots,k , \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ri} y_i = 0 \quad , r = 1,2,\dots,s , \tag{11}$$

$$y_i = f_i(x_i) \quad , \quad i = 1,2,\dots,m \tag{12}$$

pro neznámé

$$x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m .$$

Pro řešení této soustavy má význam ta skutečnost, že matice (q_{pi}) má hodnost $k-1$ a matice (a_{ri}) má hodnost n, takže v (10), (11) lze vynechat některé rovnice jakožto zbytečné. V dalším budeme proto předpokládat, že z matice (q_{pi}) je již vynechán poslední řádek, takže matice (q_{pi}) je typu $(k-1, m)$ a že z matice (a_{ri}) jsou odstraněny všechny řádky kromě řádků (9), takže matice (a_{ri}) je nyní typu (n, m). Vlastnosti soustavy (10), (11), (12) s ohledem na její řešitelnost a řešení se tím nezmění.

2.3.2 Uzavřené řetězy odpovídající řádkům (9) jsou zřejmě kružnicemi. Nazveme je <u>systémem nezávislých kružnic</u> příslušných k dané kostře (tvořené podle našeho předpokladu prvními $k-1$ hranami). Matici A tvaru (9) pak nazveme maticí kružnic.

Z hlediska řešení soustavy (10), (11), (12) pak není třeba další kružnice ani uzavřené řetězy uvažovat.

3. Konstrukce systému nezávislých kružnic

3.1 Nalezení nezávislých kružnic příslušných k dané kostře

3.1.1 Nechť je dán souvislý graf s h uzly a m hranami. Předpokládejme opět, že jeho hrany jsou očíslovány tak, že hrany

$$1, 2, \ldots, h-1$$

tvoří kostru grafu. Rovněž budeme v dalším vždy předpokládat, že matice Q , A jsou již redukovány způsobem popsaným v odstavci 2.3.1.

Rozdělíme nyní matici Q na dvě části tak, že první část bude tvořena prvními $h-1$ sloupci, druhou část budou tvořit zbývající sloupce. Lze tedy psát

$$Q = (Q^1, Q^2) ,$$

kde Q^1 je matice typu $(h-1, h-1)$ a matice Q^2 je typu $(h-1, m)$. Stejným způsobem rozdělíme matici A , takže můžeme psát

$$A = (A^1, A^2) .$$

Při tom je A^1 matice typu $(m, h-1)$ a A^2 matice typu (m, m) , podle 2.2.3 je $A^2 = E$ (E je jednotková matice).

3.1.2 Vztah (8) lze přepsat do maticového tvaru:

$$Q \cdot A' = 0 , \qquad (13)$$

(' značí transponovanou matici a 0 značí nulovou matici).

Vztah (13) lze vzhledem k rozdělení matic Q , A napsat ve tvaru

$$Q^1 \cdot (A^1)' + Q^2 \cdot (A^2)' = 0 ,$$

po úpravě a s přihlédnutím ke vztahu $A^2 = E$ dostaneme

$$Q^1 \cdot (A^1)' = -Q^2 , \qquad (14)$$

a konečně

$$(A^1)' = -(Q^1)^{-1} \cdot Q^2 \qquad (15)$$

Inversní matice $(Q^1)^{-1}$ jistě existuje, neboť sloupce matice Q^1 odpovídají kostře grafu, takže podle 1.3.5 jsou její sloupce lineárně nezávislé, matice Q^1 je tedy regulární.

Vztah (15) tedy určuje pro danou kostru matici A^1, čímž je také určena matice kružnic A ve tvaru

$$A = (A^1, E).$$

3.2 Algoritmus pro současné nalezení kostry a příslušného systému nezávislých kružnic v grafu

3.2.1 Aplikace vztahu (15), resp. (14) sice předpokládá znalost kostry grafu, ale ukazuje se, že tato znalost není podstatná. Představíme si totiž matici Q rozdělenou (prozatím neurčeným způsobem) na matice Q^1, Q^2 tak, že sloupce matice Q^1 odpovídají kostře grafu. Nebudeme však požadovat, aby to bylo právě prvních $k-1$ sloupců a dále nebudeme zařazení sloupců matice Q do jejích částí Q^1 a Q^2 provádět předem, ale postupně během stanovení matice A^1. Při tom samozřejmě předpokládáme stejné rozdělení matice A na matice A^1 a A^2 jako u matice Q.

3.2.2 Výše uvedený přístup lze realizovat takto:

Vztah (14) je zřejmě ekvivalentní se soustavami lineárních rovnic

$$Q^1 \cdot (a^1_{r*})' = -Q^2 (a^2_{r*})' = -q_{*l_r}\,, \quad r \in Z \tag{16}$$

kde Z je množina hran nepatřících ke kostře,
a^1_{r*} je r-tý řádek matice A^1,
q_{*l_r} je r-tý sloupec matice Q^2, t.j. l_r-tý sloupec matice Q (pro vhodné l_r).

Množina hran Z a tedy i matice Q^1 musí být při tom určena tak, aby sloupce matice Q^1 byly lineárně nezávislé.

Soustavy (16) nyní řešíme současně tak, že vycházíme z matice Q a snažíme se ji tvořením lineárních kombinací jejích řádků upravit tak, aby jistá její část (t.j. právě sloupce patřící do matice Q^1) měla diagonální tvar. K tomu lze použít libovolné metody, jako výhodná se ukazuje elimiační metoda bez zpětného chodu, zvané také někdy metoda Jordanova. Po skončení těchto úprav jsou zbývající sloupce, (t.j. sloupce vzniklé z matice Q^2 výše uvedenou úpravou) řešením soustav (16), t.j. tvoří řádky hledané matice A^1.

Při tom postupujeme tak, že nejdříve do matice Q^1 zařadíme první sloupec matice Q a pak současně při úpravě na diagonální tvar o každém dalším sloupci rozhodneme, zda je na již vybraných sloupcích lineárně nezávislý (pak jej zařadíme do matice Q^1) nebo lineárně závislý (pak jej zařadíme do matice Q^2). Vzhledem k současnému převedení matice Q^1 na diagonální tvar lze o této závislosti či nezávislosti rozhodnout velice snadno, jak bude podrobněji popsáno dále.

3.2.3 Pro řešení soustav (16), t.j. soustav (14) za účelem stanovení matice A^1 lze tedy použít tohoto algoritmu.

Předpokládejme opět, že je dán souvislý graf s k uzly a m hranami a že z jeho incidenční matice Q je odstraněn poslední řádek.

Najdeme nejdříve v prvním sloupci matice Q první řádek j_1 s nenulovým prvkem. Lze předpokládat, že pro tento prvek platí

$$q_{j_1 1} = -1,$$

v opačném případě násobíme řádek j_1 hodnotou -1. Nyní najdeme v prvním sloupci případný další nenulový prvek $q_{j'1}$. Řádek j' pak nahradíme součtem nebo rozdílem řádků j', j_1, přesněji řečeno řádek j' bude po této úpravě tvořen vektorem

$$q_{j'*} + q_{j'1} \cdot q_{j_1 *}$$

(hvězdička místo sloupcového indexu značí opět celý příslušný řádek).

Po této úpravě má matice Q v prvním sloupci pouze jeden nenulový prvek, a to -1 v řádku j_1.

Nechť je nyní již sestrojena posloupnost sloupců (patřících do matice Q^1)

$$1 = i_1, i_2, \ldots, i_n \tag{17}$$

a řádků

$$j_1, j_2, \dots, j_p \tag{18}$$

takových, že

1) pro $\alpha = 1, 2, \dots, p$ platí $q_{j_\alpha i_\alpha} = -1$,

$$q_{j i_\alpha} = 0 \quad \text{pro} \quad j \neq j_\alpha ,$$

2) řádky (18) jsou navzájem různé,

3) každý sloupec i, pro nějž je $i \leq i_p$ je lineární kombinací sloupců (17).

Je-li $p < k-1$, lze posloupnosti (17), (18) rozšířit o další členy i_{p+1}, j_{p+1} takto:

Z vlastností 1, 2 posloupností (17), (18) plyne, že sloupce (17) jsou lineárně nezávislé. Jelikož hodnost matice Q je $k-1$ a jelikož $p < k-1$, existuje na základě vlastnosti 3 jistý sloupec i, který není lineární kombinací sloupců (17), pro tento sloupec je nutně $i > i_p$. Vyberme první takový sloupec a označme jej i_{p+1}. Pak existuje řádek j_{p+1} různý od řádků (18) takový, že $q_{j_{p+1}, i_{p+1}} \neq 0$. Jinak by totiž sloupec i_{p+1} byl lineární kombinací sloupců (17). Opět můžeme předpokládat, že

$$q_{j_{p+1}, i_{p+1}} = -1 ,$$

v opačném případě násobíme řádek j_{p+1} vhodnou konstantou, jelikož řádky (18) jsou navzájem různé, nemění se tím dříve vytvořené sloupce matice Q'.

Je-li v některém dalším řádku j' prvek $q_{j' i_{p+1}}$ nenulový, odstraníme jej tím, že k tomuto řádku přičteme vhodný násobek řádku j_{p+1}, tím se opět nemění dříve zpracované sloupce matice Q'.

Tímto způsobem nakonec dosáhneme toho, že posloupnosti sloupců

$$1 = i_1, i_2, \dots, i_{p+1}$$

a řádků

$$j_1, j_2, \dots, j_{p+1}$$

budou mít tytéž vlastnosti 1, 2, 3 jaké měly posloupnosti (17), (18).

S výběrem sloupců, t.j. s konstrukcí posloupností (17), (18) pokračujeme tak dlouho, dokud není $p = k-1$. V tomto případě sloupce (17) tvoří matici Q'.

Zaměníme nyní pořadí sloupců v matici Q tak, že na místě prvních $k-1$ sloupců budou sloupce

$$i_1^1, i_2^1, \dots, i_{k-1}^1$$

vzniklé ze sloupců (17) takovou změnou pořadí, aby při stejné změně pořadí řádků (18) na

$$j_1^1, j_2^1, \dots, j_{k-1}^1$$

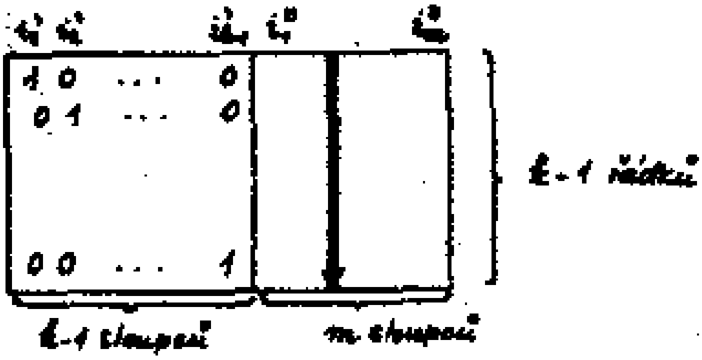
platilo

$$j_1^1 = 1, \; j_2^1 = 2, \dots, j_{k-1}^1 = k-1$$

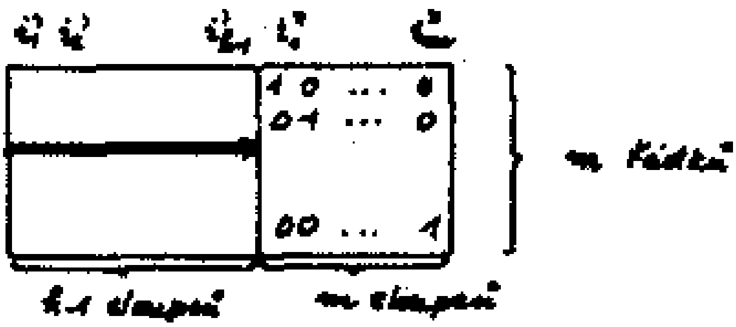
Zbývající sloupce

$$i_1^2, i_2^2, \dots, i_m^2 \; , \quad m = n-k+1$$

dáme na místo posledních m sloupců. Pak bude mít matice vzniklá z matice Q' diagonální tvar, t.j. matice Q byla posléze převedena na tvar



Zachováme-li stejné pořadí sloupců i v matici A, bude tato mít tvar



Tím je matice A, t.j. matice popisující systém nezávislých kružnic zcela určena.

<u>3.2.4</u> Ponecháme-li v maticích Q, A <u>původní</u> pořadí sloupců

a jsou-li $\bar{q}_{rj}$ prvky matice Q po úpravě popsané v 3.2.3, máme zřejmě:

$$a_{ri_s} = \bar{q}_{ri_s^*} \quad , s=1,2,\dots,k-1 ,$$
$$a_{ri_p^*} = \delta_{rp} \quad , p=1,2,\dots,m$$

pro $r=1,2,\dots,m$, při tom je δ_{rp} Kroneckerův symbol.

3.3 Realizovatelnost algoritmu pro nalezení systému nezávislých kružnic v oboru hodnot -1,0,+1

3.3.1 Matice Q je incidenční matice daného grafu, podle definice 1.2.4 tedy pro její prvky přicházejí v úvahu pouze hodnoty

$$-1,\ 0,\ +1. \tag{19}$$

Totéž lze říci o matici kružnic A , v kterou přechází matice Q úpravami popsanými v 3.2.3. Vzniká nyní otázka, zda lze <u>všechny</u> tyto úpravy provést v oboru hodnot (19) nebo zda se při uvedených úpravách přechodně vyskytnou jako prvky matice Q i jiné hodnoty než (19). Tuto otázku řeší následující tvrzení:

<u>Veškeré</u> úpravy potřebné pro algoritmus popsaný v 3.2.3 lze provést v oboru hodnot (19). To znamená, že při aplikaci tohoto algoritmu se v <u>žádném</u> kroku nevyskytnou jako prvky matice Q jiné hodnoty než -1,0,+1.

Důkaz tohoto tvrzení zde opět pro nedostatek místa nebudeme uvádět.

3.3.2 Z 3.3.1 vyplývá, že celý algoritmus popsaný v 3.2.3 lze realizovat výhradně pomocí opakovaného provádění těchto dvou operací:

1) násobení některého řádku matice Q hodnotou -1 (t.j. změna znaménka),
2) sečtení dvou řádků matice Q (a nahrazení jednoho

z těchto řádků tímto součtem).

Ukazuje se tedy, že zvolená Jordanova metoda je pro řešení soustav lineárních rovnic v našem případě obzvláště výhodná. Vzhledem k 3.3.1 zde totiž odpadají zaokrouhlovací chyby, které jsou jednou z hlavních nevýhod této metody aplikované na obecné soustavy.

3.4 Možnosti aplikace a závěry

3.4.1 V 3.2.3 byl popsán algoritmus pro současné nalezení kostry a systému nezávislých kružnic v souvislých grafech. Tohoto algoritmu lze použít zejména v souvislosti s řešením soustavy rovnic typu (10), (11), (12), kdy by vlastnímu řešení těchto soustav měl předcházet výběr nezávislých rovnic. Jako příklad může sloužit řešení elektrických obvodů nebo řešení jiných sítí řídících se podobnými zákonitostmi. Uvedené metody bylo na příklad úspěšně použito jako součásti řešení větrních sítí dolů.

3.4.2 Z 3.2.3 je patrno, že popsaný algoritmus dává při výběru kostry grafu přednost (pokud je to možno) hranám s nízkým pořadovým číslem. Této skutečnosti lze využít v případech, kdy je žádoucí, aby hrany grafu byly do kostry zařazovány podle jistého kriteria. Stačí pak před aplikací vlastního algoritmu sloupce incidenční matice uspořádat tak, aby jejich pořadí bylo v souladu se zvoleným kriteriem pro výběr hran kostry. Otázky tohoto druhu souvisejí s nalezením tak zvané minimální kostry v ohodnoceném grafu.

3.4.3 Uvedená metoda konstrukce kostry a systému nezávislých kružnic je určen především pro aplikace na číslicových počítačích. Incidenční matice grafu, jejíž znalost popsaný algoritmus vyžaduje, lze snadno sestrojit, je-li struktura grafu zadána tím, že pro každou jeho hranu je zadán její počáteční a koncový uzel. Pro aplikaci popsaného algoritmu byl vypracován program v jazyce FORTRAN, tento program byl ověřen na počítači IBM 370/145.

Program byl vypracován v takové verzi, která předpokládá uložení celé incidenční matice ve vnitřní paměti počítače, což vzhledem k možnostem použitého počítače dovoluje zpracovávat grafy poměrně značného rozsahu. Při tom bylo k uložení incidenční matice a všech jejích modifikací až po matici kružnic použito téhož pole. Dále je užitečné si všimnout té skutečnosti, že vzhledem k 3.3.1 a 3.3.2 lze pro ukládání prvků incidenční matice a jejích modifikací použít zkrácené délky slova a ještě zvýšit maximální rozsah zpracovávaných grafů.

3.4.4 V případě, že by bylo třeba zpracovávat grafy velmi velkého rozsahu, by bylo nutno upravit program tak, že by se potřebné matice ukládaly na vnějších pamětech, převážně discích. Zdá se, že při dostatečně výkonném počítači by i toto řešení bylo přijatelné.

Literatura

[1] Čulík K., Doležal V., Fiedler M.:
Kombinatorická analýza v praxi
SNTL, Praha 1967

[2] Slavíček O. a kolektiv:
Základní numerické metody
SNTL, Praha 1964